

Compito di Matematica per la Fisica

Silvia Penati, Carlo Oleari

Prova Scritta del 16/1/2013

Problema 1

Usando intelligentemente le proprietà della trasformata di Fourier, calcolare la trasformata di

$$f(x) = \frac{x}{(x^2 + 25)^2}$$

Problema 2

Si consideri l'operatore $A : \ell_2(\mathbb{C}) \longrightarrow \ell_2(\mathbb{C})$ così definito

$$A\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \alpha_5, \alpha_6, \dots\} = \{0, -i\alpha_3, i\alpha_2, 0, -i\alpha_6, i\alpha_5, \dots\}$$

- 1) Si scriva la rappresentazione matriciale di A .
- 2) A è un operatore limitato?
- 3) Dire se esiste l'operatore inverso, giustificare la risposta e, nel caso esista, calcolarlo.
- 4) Si studino proprietà di autoaggiuntezza e si determini lo spettro puntuale dell'operatore.

Problema 3

Data la funzione $f(x) = (x + i\alpha)^\beta e^{-|x|}$ con α e β reali, discutere per quali valori dei parametri la funzione è in

- 1) $L^1(\mathbb{R})$
- 2) $L^2(\mathbb{R})$

Problema 4

Data la funzione

$$f(z) = \frac{e^z}{z^2(z+1)}$$

- 1) Si identifichino e si classifichino tutti i punti singolari.
- 2) Si calcolino i residui nei poli.
- 3) Si calcolino

$$I_1 = \int_{|z|=\frac{1}{2}} f(z) dz, \quad I_2 = \int_{|z+1|=\frac{1}{2}} f(z) dz, \quad I_3 = \int_{|z+1|=3} f(z) dz$$